Hong Kong Mathematics Olympiad (2003 – 2004)

Final Event 1 (Group)

香港数学竞赛 (2003 – 2004)

决赛项目 1 (团体)

除非特别声明，答案须用数字表达，并化至最简。
Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest forms.

1. 已知 a 为整数。若 $50!$ 能被 2^a 整除，求 a 的最大可能的值。

Given that a is an integer . If $50!$ is divisible by 2^a , find the largest possible value of a .

2. 设 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数，例如 $[2.5]=2$。若 $b=\left[100\times\frac{11\times77+12\times78+13\times79+14\times80}{11\times76+12\times77+13\times78+14\times79}\right]$，求 b 的值。

Let $[x]$ be the largest integer not greater than x . For example , $[2.5] = 2$. If $b=\left[100\times\frac{11\times77+12\times78+13\times79+14\times80}{11\times76+12\times77+13\times78+14\times79}\right]$, find the value of b .

3. 若在 200 至 500 之间有 c 个数是 7 的倍数，求 c 的值。

If there are c multiples of 7 between 200 and 500 , find the value of c .

4. 已知 $0\le x_0\le\frac{\pi}{2}$ 且 x_0 满足方程 $\sqrt{\sin x+1}-\sqrt{1-\sin x}=\sin\frac{x}{2}$。若 $d=\tan x_0$，求 d 的值。

Given that $0\le x_0\le\frac{\pi}{2}$ and x_0 satisfies the equation $\sqrt{\sin x+1}-\sqrt{1-\sin x}=\sin\frac{x}{2}$. If $d=\tan x_0$, find the value of d .

Hong Kong Mathematics Olympiad (2003 – 2004)

Final Event 2 (Group)

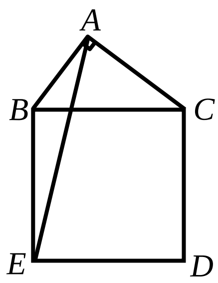
香港数学竞赛 (2003 – 2004)

决赛项目 2 (团体)

除非特别声明，答案须用数字表达，并化至最简。
Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest forms.

1. 若 5^{5^5} 的十位数是 a，求 a 的值。

If the tenth-place digit of 5^{5^5} is a, find the value of a.

2. 

图一

Figure 1

如图一，ΔABC 是一直角三角形，$AB = 3\text{ cm}$，$AC = 4\text{ cm}$ 及 $BC = 5\text{ cm}$。若 $BCDE$ 是一正方形且 ΔABE 的面积是 $b\text{ cm}^2$，求 b 的值。

In Figure 1, ΔABC is a right-angled triangle, $AB = 3\text{ cm}$, $AC = 4\text{ cm}$ and $BC = 5\text{ cm}$. If $BCDE$ is a square and the area of ΔABE is $b\text{ cm}^2$, find the value of b.

3. 已知在 100 以内的质数中，其个位并非平方数的数目有 c 个，求 c 的值。

Given that there are c prime numbers less than 100 such that their unit digits are not square numbers, find the value of c.

4. 若直线 $y=x+d$ 与 $x=-y+d$ 相交于点 $(d-1, d)$，求 d 的值。

If the lines $y=x+d$ and $x=-y+d$ intersect at the point $(d-1, d)$, find the value of d.

Hong Kong Mathematics Olympiad (2003 – 2004)

Final Event 3 (Group)

香港数学竞赛 (2003 – 2004)

决赛项目 3 (团体)

除非特别声明，答案须用数字表达，并化至最简。
Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest forms.

1. 若 a 是方程 $\sqrt{x(x+1)(x+2)(x+3)+1}=71$ 的最小实数解，求 a 的值。

If a is the smallest real root of the equation $\sqrt{x(x+1)(x+2)(x+3)+1}=71$, find the value of a.

2. 已知质数 p 和 q 满足方程 $18p+30q=186$。若 $\log_8\left(\frac{p}{3q+1}\right)=b\geq 0$，求 b 的值。

Given that p and q are prime numbers satisfying the equation $18p+30q=186$. If $\log_8\left(\frac{p}{3q+1}\right)=b\geq 0$, find the value of b.

3. 已知对任意实数 x、y 及 z，运算 $\oplus$ 满足

(i) $x\oplus 0=1$；及

(ii) $(x\oplus y)\oplus z=(z\oplus xy)=z$。

若 $1\oplus 2004=c$，求 c 的值。

Given that for any real numbers x, y and z, $\oplus$ is an operation satisfying

(i) $x\oplus 0=1$, and

(ii) $(x\oplus y)\oplus z=(z\oplus xy)=z$.

If $1\oplus 2004=c$, find the value of c.

4. 已知 $f(x)=(x^4+2x^3+4x-5)^{2004}+2004$ ，若 $f(\sqrt{3}-1)=d$，求 d 的值。

Given that $f(x)=(x^4+2x^3+4x-5)^{2004}+2004$. If $f(\sqrt{3}-1)=d$, find the value of d.

Hong Kong Mathematics Olympiad (2003 – 2004)

Final Event 4 (Group)

香港数学竞赛 (2003 – 2004)

决赛项目 4 (团体)

除非特别声明，答案须用数字表达，并化至最简。
Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest forms.

1. 若 $f(x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}$ 及 $P=f(\dfrac{1}{1001})+f(\dfrac{2}{1001})+\cdots+f(\dfrac{1000}{1001})$，求 P 的值。

If $f(x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}$ and $P=f(\dfrac{1}{1001})+f(\dfrac{2}{1001})+\cdots+f(\dfrac{1000}{1001})$, find the value of P .

2. 设 $f(x)=|x-a|+|x-15|+|x-a-15|$ ，其中 $a\le x\le 15$ 及 $0<a<15$ 。若 Q 是 $f(x)$ 的最小值，求 Q 的值。

Let $f(x)=|x-a|+|x-15|+|x-a-15|$, where $a\le x\le 15$ and $0<a<15$. If Q is the smallest value of $f(x)$, find the value of Q .

3. 若 $2^m=3^n=36$ 及 $R=\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}$，求 R 的值。

If $2^m=3^n=36$ and $R=\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}$, find the value of R .

4. 设 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数，例如 $[2.5]=2$。若 $a=1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{2004^2}$ 及 $S=[a]$，求 S 的值。

Let $[x]$ be the largest integer not greater than x, for example, $[2.5]=2$. If $a=1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{2004^2}$ and $S=[a]$, find the value of S .